M－C

２０１８年度入学試験問題

数　学

(90分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。

2. この問題冊子は2ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。

3. 監督者の指示に従って、解答用紙(4枚)それぞれに受験番号、氏名を記入してください。

4. 解答は、すべて解答用紙の指定箇所に記入してください。

5. 筆記用具以外は、使用しないでください。

6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕

(1)　$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=3,\ \angle \mathrm{A}=60^\circ$ とする．$\triangle$ABC の内部の点 P が $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たすとき，線分 PC の長さを求めなさい．

(2)　不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_9(5-x) \geqq \dfrac{1}{2}$ を解きなさい．

(3)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(2i),\ \mathrm{B}(-\sqrt{3}-i),\ \mathrm{C}(-1-\sqrt{3}i)$ を図示しなさい．また，$\arg z=\angle\mathrm{BAC}$ となるような複素数 z を一つ求めなさい．ただし，i は虚数単位とする．

〔 II 〕

(1)　s, t を $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする．1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ となるような点 P, Q をとる．

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ と s, t を用いて表しなさい．

(b)　$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{OA},\ \mathrm{PQ}\perp\mathrm{BC}$ のとき，s, t を求めなさい．

(2)　袋 A には白玉 6 個，赤玉 4 個，袋 B には白玉 3 個，赤玉 5 個が入っている．

(a)　袋 A，袋 B から玉を同時に 2 個ずつ取り出すとき，取り出した 4 個の玉がすべて同じ色である確率を求めなさい．

(b)　袋 A から玉を同時に 2 個取り出して袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から玉を 1 個取り出すとき，袋 B から取り出した玉が赤玉である確率を求めなさい．

〔 III 〕

(1)　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a)　a_3 から a_{10} まですべて求めなさい.

(b)　すべての自然数 n に対して，$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.

(2)　a, b を $a < b$ を満たす実数の定数とする．放物線 $C_1 : y = -x^2 - 2x$, $C_2 : y = (x-a)^2 + a + 2$, $C_3 : y = (x-b)^2 + b + 2$ について，C_1 と C_2 はただ 1 つの共有点をもち，C_1 と C_3 もただ 1 つの共有点をもつ.

(a)　a, b の値を求めなさい.

(b)　3 つの放物線 C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形を図示し，面積を求めなさい.

〔 IV 〕　$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ とする.

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求めなさい.

(2)　曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標を求めなさい.

(3)　関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸の表を作成し，それをもとにグラフの概形を描きなさい.

(4)　区間 $0 \leqq x \leqq 2$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.