M—A 3

2019年度入学試験問題

数　学

(90分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は4ページあります。試験中，ページの脱落等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙(マークシート)の汚れなどに気づいた場合も，同様に知らせてください。
3. 解答用紙(マークシート)は折り曲げたり，汚したりしないでください。
4. 解答は，すべて解答用紙(マークシート)に記入し，解答用紙(マークシート)の枠外には，なにも書かないでください。
5. **試験問題は問題記号ア～レで42問あります。**
   解答用紙(マークシート)には，問題記号がア～ンまで印刷されています。解答にあたっては，問題記号ア～レの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。**ただし，問題冊子を開いてはいけません。**
7. マークは必ずHBの黒鉛筆を使用し，訂正する場合は，完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って，解答用紙(マークシート)に解答する科目・受験番号をマークするとともに，受験番号，氏名を記入してください。
9. 解答する科目，受験番号，解答が正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は，使用しないでください。
11. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔Ⅰ〕

(1) $a:b:c=2:3:4$ のとき，$bc:ca:ab=$ $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$: $\boxed{\text{ウ}}$ である．比は最も簡単な整数比となるように答えなさい．

(2) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}}\times 24^{\frac{1}{3}}\div\sqrt[3]{48}=2^{\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}}$

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} x^2-8x+8<0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases}$$

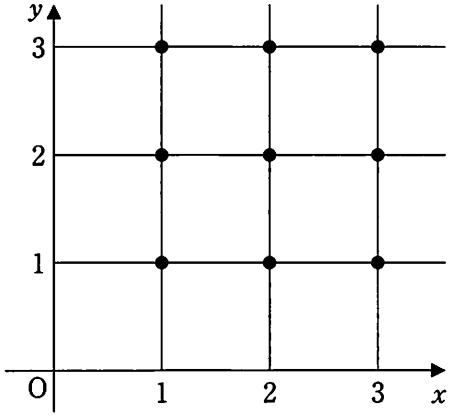
を満たす最小の整数は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $\sin 75^\circ\times\cos 75^\circ\times\tan 15^\circ=\dfrac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

(5) 関数 $f(x)=x^2+$ $\boxed{\text{コ}}$ は，等式 $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^2 tf(t)\,dt$ を満たす．

〔Ⅱ〕

(1) 下図のように黒丸で表された9個の点をとる.



(a) これら9点のうちの2点を結ぶ線分で y 軸と平行なものは全部で $\boxed{\text{サ}}$ 本ある.

(b) これら9点のうちの3点を頂点とする三角形は全部で $\boxed{\text{シ}}$ 個ある.

(2) $y = (\log_3 x)^3 + 6(\log_9 x)^2 - 6\log_3 x + 3 \quad \left(\dfrac{1}{27} \leqq x \leqq 27\right)$ とする.

(a) $t = \log_3 x$ とおくと, $y = t^3 + \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}t^2 - 6t + 3$ である.

(b) y は $x = \boxed{\text{ソ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとる.

〔Ⅲ〕

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める.

$$a_1 = 2,$$
$$a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} & (n = 2, 4, 6, \cdots) \\ a_{n-1} - 1 & (n = 3, 5, 7, \cdots) \end{cases}$$

(a) $a_4 = \boxed{\text{ツ}}$

(b) $a_{2n} = \boxed{\text{テ}}^{\,n} + \boxed{\text{ト}}$

(c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ と定めるとき,

$$S_{2n} = \boxed{\text{ナ}}\left(\boxed{\text{ニ}}^{\,n} + \boxed{\text{ヌ}}\,n + \boxed{\text{ネ}}\right)$$

である.

(2) $\triangle$OAB において, OA $= 1$, OB $= \sqrt{3}$, AB $= \sqrt{3}$ とし, 辺 AB を $2:1$ に内分する点を C とする. A から直線 OC に下ろした垂線を AP とし, 直線 AP が直線 OB と交わる点を Q とする.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(c) QP : PA $= \boxed{\text{マ}} : \boxed{\text{ミ}}$

比は最も簡単な整数比となるように答えなさい.

〔Ⅳ〕

(1)

(a) 複素数平面上の点 $\alpha = -1 + \sqrt{2}i$ を点 β を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点は $1 - \sqrt{2}i$ である．このとき，$\beta = \sqrt{\boxed{\text{ム}}} + \boxed{\text{メ}}\,i$ である．ただし，i は虚数単位とする．

(b) 複素数平面上の点 z は点 0 を中心とする半径 2 の円周上を動く．このとき，複素数 $2\left(z + \frac{1}{z}\right)$ の実部を u，虚部を v とすると，u，v は方程式

$$\frac{u^2}{\boxed{\text{モ}}} + \frac{v^2}{\boxed{\text{ヤ}}} = 1$$

を満たす．

(2) a は正の定数とする．曲線 $y = e^x$ を C_1 とし，曲線 $y = a\sqrt{x}$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつ．

(a) 点 P の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}$ であり，$a = \sqrt{\boxed{\text{ラ}}\,e}$ である．

(b) C_2 と直線 $y = e$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}} e^{\boxed{\text{レ}}}\pi$ である．

解答上の注意

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ などには数値が入ります。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1. 解答欄の各桁の該当する数字の欄にマークしてください。
2. 解答が負数の場合のみ符号欄にマークしてください。
3. 分数形 $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ の部分では，既約分数(それ以上約分できない分数)で表し，分母は必ず正とします。また，この形で整数を表すときには，分母を1とします。
4. 根号の中は，正の整数であって，2以上の整数の平方で割り切れないものとします。

解答記入例：$\boxed{\text{エ}}$ に −5 と解答する場合

	符号	10 の 桁									1 の 桁									
エ	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

$\boxed{\text{カ}}$ に 57 と解答する場合

	符号	10 の 桁									1 の 桁									
カ	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⓪

解答表示例

$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ に $-\dfrac{3}{2}$ を当てはめる場合には $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$，0の場合には $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とします。

$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ に $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を当てはめる場合には $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とします。

$\boxed{}\,x^3+\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ に $-x^3-x+1$ を当てはめる場合には $\boxed{-1}\,x^3+\boxed{0}\,x^2+\boxed{-1}\,x+\boxed{1}$ とします。