M

平成27年度 数学アピール（公募制推薦）入学試験問題

数　学

（60分）

注意事項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないでください。

2．この問題冊子は２ページです。試験中，ページの脱落等に気づいた場合には，手を挙げて監督者に知らせてください。
問題・解答用紙の汚れなどに気づいた場合も，同様に知らせてください。

3．監督者の指示に従って，解答用紙の１枚目に受験番号，氏名を記入してください。

4．解答は，すべて解答用紙（７枚）に記入してください。

5．筆記用具以外は，使用しないでください。

6．試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕 (1) $1 = 1^2 = \left(\dfrac{1+1}{2}\right)^2$, $1+3 = 2^2 = \left(\dfrac{3+1}{2}\right)^2$, $1+3+5 = 3^2 = \left(\dfrac{5+1}{2}\right)^2$ により，1 から 9999 までの奇数の和は $\left(\dfrac{9999+1}{2}\right)^2 = 5000^2$ と予想される．この予想が正しいことを証明しなさい．

(2) 三角形 ABC の辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a, b, c とする．頂点 A から辺 BC または BC の延長に垂線 AH を下ろす．BH:CH を a, b, c を用いて表しなさい．

(3) 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$x^3 - 3x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ．このことを用いて，

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma,\ (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

の値を求めなさい．

〔 II 〕 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が 3 つの不等式

$$y \geqq 0,\ y \leqq \sqrt{3}x + \sqrt{3},\ y \leqq -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

の表す領域 D を動くとき，点 P と直線 $y = 0$ との距離を d_1，点 P と直線 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ との距離を d_2，点 P と直線 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ との距離を d_3 とする．不等式 $d_2 \leqq d_1$ と $d_2 \leqq d_3$ を同時に満たす点 P 全体の集合を E とする．

(1) 領域 E を図示し，その面積を求めなさい．

(2) r を正の数とする．点 (a, b) が領域 E を動くとき，不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq r^2$ の表す領域が D の部分集合であるための必要十分条件を r, a, b を用いて表しなさい．

〔 III 〕 平面上の 3 点 A，B，C は一直線上にないとする．直線 AC に関して点 B と対称な点を D とし，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とする．$\overrightarrow{d}$ を $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ および，それらの長さや内積を用いて表しなさい．

〔 IV 〕 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{3a_n}{3a_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく.数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい.

〔 V 〕 関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$ $(0 < x \leqq \pi)$ とする.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めなさい.

(2) $\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ をみたす θ $(0 < \theta \leqq \pi)$ に対して $f(\theta)$ の値を求めなさい.

(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい.ただし,グラフの凹凸は調べなくてもよい.

(4) a を $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす定数とする.

$$F(a) = \int_a^{\pi} f(x)\ dx$$

を計算し,極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} F(a)$ を求めなさい.