量子力学の規約

1. 量子コンピュータの状態は $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の元として表される.
ただし, ゼロベクトル $\mathbf{0}$ ($|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$ ではない) はどんな状態も表さない.

2. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. $|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ と $\alpha|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ は同じ状態を表す. そこで, 状態を表すベクトルのノルムは 1 であるようにとる.

3. $|x\rangle, |y\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が状態であれば, $\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$) も状態である. これを状態の重ね合わせの原理と呼ぶ.

4. 量子コンピュータの状態の推移はユニタリ作用素 U によって
$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \ni |x\rangle \mapsto U|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\}$$
と推移する.

5. 量子コンピュータの状態を観測して観測値を得ると状態に対応するベクトルは観測値に対応するベクトルに推移する.

規約の詳細 ($n=1$ の場合)

量子コンピュータの基本構成要素を量子ビット (qubit, キュービット) と呼ぶ.
n 個のキュービットの集まり (量子レジスタ) の状態が $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元に対応する.

1 キュービットの場合, 量子コンピュータの状態は (少なくとも一方は 0 ではない) 複素数 α, β により,

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

で表せる. これは状態 $|0\rangle$ と状態 $|1\rangle$ の重ね合わせ状態で, α, β を確率振幅という.
このベクトルのノルムの 2 乗は

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)^*(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = (\overline{\alpha}\langle 0| + \overline{\beta}\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

だから, 規約 (2) により, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ である.
規約 (5) により, 状態 $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を観測すると確率 $|\alpha|^2$ で 0 を観測して状態は $|0\rangle$ に推移し, 確率 $|\beta|^2$ で 1 を観測して状態は $|1\rangle$ に推移する (なので一度観測して以降, 何度観測しても観測結果は変わらない).

規約の詳細 ($n = 1$ の場合)

$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．規約 (2) により $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ と $e^{i\lambda}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ は同じ状態を表す ($|e^{i\lambda}| = 1$ だからノルムは 1 のまま)．これを

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \sim e^{i\lambda}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

と書く．複素数 α, β の極表示を ($\arg(\beta/\alpha)$ を 0 と 2π の間にとって)

$$\alpha = ae^{is}, \quad \beta = be^{it} \quad (a, b \geq 0,\ 0 \leq t - s < 2\pi)$$

とすると，

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = a^2 + b^2 = 1, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

より，

$$a = \cos\frac{\theta}{2}, \quad b = \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とおける．したがって，

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = e^{is}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{it}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = e^{\frac{i(s+t)}{2}}\left(e^{\frac{i(s-t)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i(t-s)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$
$$\sim e^{\frac{i(s-t)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i(t-s)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

ブロッホ球表現

前頁の $t-s$ を φ で置き換えて, 量子ビットの状態を 2 つのパラメータ θ, φ によって

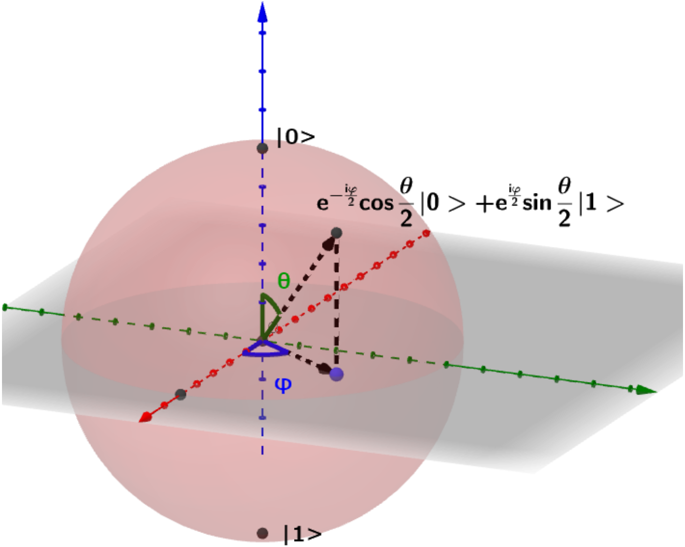
$$e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

と記述することをブロッホ球表現と呼ぶ. これに $e^{\frac{i\varphi}{2}}$ をかけた (規約 (2) より同じ状態を表す) ベクトル $\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ をブロッホ球表現と呼ぶこともある.

$$e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

という写像は量子ビットの状態と $\mathbb{R}^3$ の単位球面との 1 対 1 対応を与える.
この単位球面をブロッホ球と呼ぶ. 単位球の北極は $\theta = 0$ である点なので $|0\rangle$ に対応し, 南極は $\theta = \pi$ である点なので $|1\rangle$ に対応する ($e^{i\varphi}|1\rangle \sim |1\rangle$ に注意).

ブロッホ球


|0>
$e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0> + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1>$
θ
φ
|1>

立体射影

写像

$$e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

は唐突すぎて意味不明なので，どういう原理で導出されるかを考えてみる．

$$e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \sim e^{i\lambda}\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

だったので，一つの状態ベクトルは $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の係数の比の値

$$\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}} = e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2}$$

と 1 対 1 で対応する．この値は $0 \leq \theta \leq \pi$ より，任意の複素数または ∞ をとる．したがって，

$$\text{状態ベクトル} \overset{1\text{ 対 }1}{\Longleftrightarrow} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

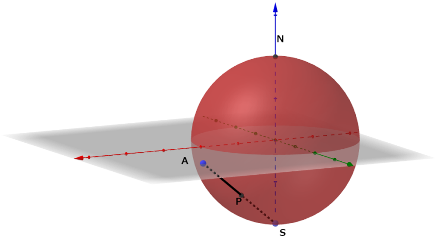
である．2 つの複素数の比の集合 ($\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を「比が等しい」という同値関係で割った集合で $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視出来る) を**複素射影直線**といい，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で表す．

立体射影

$\mathbb{R}^3$ における xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ を複素数 $x + iy$ と見て, xy 平面を複素平面と同一視する. また, 原点を中心とする単位球面を

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とおく. S^2 上の点 N$(0, 0, 1)$ を北極, S$(0, 0, -1)$ を南極と呼ぶ.



$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して α に対応する $\mathbb{R}^3$ 上の点を A とする. 直線 SA と S^2 の交点のうち, S でない点を P として, 写像

$$F : \mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \mathrm{P} \in S^2 \setminus \{\mathrm{S}\}$$

を定義する. F を立体射影という. さらに $F(\infty) = \mathrm{S}$ と定めると写像

$$F : \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ni \alpha \mapsto \mathrm{P} \in S^2$$

は全単射となる. F の像としての S^2 をリーマン球面と呼ぶ.

立体射影

命題 3.1

立体射影 F は

$$F(x+iy) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられる.

【証明】$F(x+iy) = (X, Y, Z)$ とおくと, 点 (X, Y, Z) は点 $(0, 0, -1)$ と点 $(x, y, 0)$ の内分点または外分点なので, その比を $t : 1-t$ とおくと, F の定義から (X, Y, Z) は $(0, 0, -1)$ ではないので, $t \neq 0$ であって,

$$X = tx, \ \ Y = ty, \ \ Z = -(1-t) = t-1$$

である. また, $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ だから

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (t-1)^2 = 1$$

$$(1+x^2+y^2)t^2 - 2t = 0.$$

命題 3.1 の証明

$t \neq 0$ より, $t = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}$. よって,

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ Z = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}. \quad \square$$

【注意】

1. $z = x + iy$ とおけば $F(z) = \left(\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{2\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right)$.
2. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ として $r \to \infty$ とすると

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{2r\cos\theta}{1+r^2}, \frac{2r\sin\theta}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2} \right) \xrightarrow{r\to\infty} (0, 0, -1) = \mathrm{S}\ (\text{南極})$$

となるので, F が ∞ で連続 ($\lim_{z\to\infty} F(z) = \mathrm{S} = F(\infty)$).

状態ベクトルの立体射影

これまでのことから,

$$\text{状態ベクトルの集合} \overset{1\text{ 対 }1}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})(\text{複素射影直線}) \overset{1\text{ 対 }1}{\Longleftrightarrow} S^2(\text{リーマン球面})$$

が分かった. そこで状態ベクトル

$$e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

に対応するリーマン球面上の点の座標を求めよう. このベクトルに対応する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の元は

$$e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2} = \cos\varphi\tan\frac{\theta}{2} + i\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2}$$

であった. 命題 3.1 により, この複素数に対応する S^2 上の点 (X, Y, Z) 各座標の分母は全て共通で,

$$1 + \left(\cos\varphi\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

状態ベクトルの立体射影

よって，各座標の分子に $x = \cos\varphi \tan\dfrac{\theta}{2}, y = \sin\varphi\tan\dfrac{\theta}{2}$ を代入して，

$$
\begin{aligned}
X &= 2\cos\varphi\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 2\cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta\cos\varphi, \\
Y &= 2\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \sin\theta\sin\varphi, \\
Z &= \left(1 - \left(\cos\varphi\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} \\
&= \left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta
\end{aligned}
$$

を得る．これは状態ベクトルのブロッホ球表現から得られるブロッホ球上の点の座標と一致し，ブロッホ球は立体射影から構成されることが分かった．

ブロッホ球上の回転

規約 (4) によりユニタリ作用素

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \quad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

によって量子コンピュータの状態は推移する．これらはそれぞれブロッホ球上の y 軸の周りの β 回転, z 軸の周りの α 回転を引き起こす．

$$R_z(\alpha)(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle) = e^{-\frac{i(\varphi-\alpha)}{2}} cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\frac{i(\varphi-\alpha)}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\mapsto (\sin\theta\cos(\varphi-\alpha), \sin\theta\sin(\varphi-\alpha), \cos\theta)$$

だから $R_z(\alpha)$ はブロッホ球を z 軸 (ブロッホ球の図の青い軸) 方向から見て時計回りの α 回転 ($-\alpha$ 回転) を引き起こしている．

ブロッホ球上の回転

y 軸 (ブロッホ球の図の緑の軸) の周りの回転は θ, φ を複合的に変化させ，ブロッホ球表現を用いては簡単には示せないので，立体射影を用いる．
$p, q \in \mathbb{C}$ に対して状態ベクトル $p|0\rangle + q|1\rangle$ が定まるとき，

$$R_y(\beta)(p|0\rangle + q|1\rangle) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\cos\frac{\beta}{2} + q\sin\frac{\beta}{2} \\ -p\sin\frac{\beta}{2} + q\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

このベクトルを $p'|0\rangle + q'|1\rangle$ とおく．

立体射影を F とすると，$R_y(\beta)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点 $\dfrac{q}{p}$ を $\dfrac{q'}{p'}$ に移すので

$$F\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(q/p)}{1+|q/p|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(q/p)}{1+|q/p|^2}, \frac{1-|q/p|^2}{1+|q/p|^2},\right)$$

は

$$F\left(\frac{q'}{p'}\right) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(q'/p')}{1+|q'/p'|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(q'/p')}{1+|q'/p'|^2}, \frac{1-|q'/p'|^2}{1+|q'/p'|^2},\right)$$

にうつる．これが y 軸の周りの回転であることを示したい．以下，
$F(q/p) = (X, Y, Z), F(q'/p') = (X', Y', Z')$ とおく．

ブロッホ球上の回転

$$X=\frac{2\mathrm{Re}(q/p)}{1+|q/p|^2}=\frac{2|p|^2\mathrm{Re}(q/p)}{|p|^2+|q|^2}=\frac{2\mathrm{Re}(|p|^2q/p)}{|p|^2+|q|^2}=\frac{2\mathrm{Re}(\overline{p}q)}{|p|^2+|q|^2},$$
$$Y=\frac{2\mathrm{Im}(q/p)}{1+|q/p|^2}=\frac{2|p|^2\mathrm{Im}(q/p)}{|p|^2+|q|^2}=\frac{2\mathrm{Im}(|p|^2q/p)}{|p|^2+|q|^2}=\frac{2\mathrm{Im}(\overline{p}q)}{|p|^2+|q|^2},$$
$$Z=\frac{1-|q/p|^2}{1+|q/p|^2}=\frac{|p|^2-|q|^2}{|p|^2+|q|^2}$$

であり,X', Y', Z' も同様で, $p'=p\cos\frac{\beta}{2}+q\sin\frac{\beta}{2}$, $q'=-p\sin\frac{\beta}{2}+q\cos\frac{\beta}{2}$ だから,

$$\begin{aligned}|p'|^2&=\left(p\cos\tfrac{\beta}{2}+q\sin\tfrac{\beta}{2}\right)\left(\overline{p}\cos\tfrac{\beta}{2}+\overline{q}\sin\tfrac{\beta}{2}\right)\\&=|p|^2\cos^2\tfrac{\beta}{2}+|q|^2\sin^2\tfrac{\beta}{2}+(\overline{p}q+p\overline{q})\cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\\&=|p|^2\cos^2\tfrac{\beta}{2}+|q|^2\sin^2\tfrac{\beta}{2}+\mathrm{Re}(\overline{p}q)\sin\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|q'|^2&=\left(-p\sin\tfrac{\beta}{2}+q\cos\tfrac{\beta}{2}\right)\left(-\overline{p}\sin\tfrac{\beta}{2}+\overline{q}\cos\tfrac{\beta}{2}\right)\\&=|p|^2\sin^2\tfrac{\beta}{2}+|q|^2\cos^2\tfrac{\beta}{2}-\mathrm{Re}(\overline{p}q)\sin\beta.\end{aligned}$$

ブロッホ球上の回転

したがって,

$$|p'|^2 + |q'|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

$$|p'|^2 - |q'|^2 = (|p|^2 - |q|^2)\cos\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)\sin\beta.$$

よって,

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{|p'|^2 - |q'|^2}{|p'|^2 + |q'|^2} \\ &= \frac{(|p|^2 - |q|^2)\cos\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)\sin\beta}{|p|^2 + |q|^2} \\ &= X\sin\beta + Z\cos\beta. \end{aligned}$$

ブロッホ球上の回転

$$
\begin{aligned}
2\overline{p'}q' &= 2\left(\overline{p}\cos\tfrac{\beta}{2} + \overline{q}\sin\tfrac{\beta}{2}\right)\left(-p\sin\tfrac{\beta}{2} + q\cos\tfrac{\beta}{2}\right) \\
&= -2(|p|^2 - |q|^2)\cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} + 2\overline{p}q\cos^2\tfrac{\beta}{2} - 2p\overline{q}\sin^2\tfrac{\beta}{2} \\
&= -(|p|^2 - |q|^2)\sin\beta + 2\overline{p}q\cos^2\tfrac{\beta}{2} - 2p\overline{q}\sin^2\tfrac{\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

だから, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z}), \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\overline{z})$ より,

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}(\overline{p'}q') &= -(|p|^2 - |q|^2)\sin\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)\cos^2\tfrac{\beta}{2} - 2\mathrm{Re}(p\overline{q})\sin^2\tfrac{\beta}{2} \\
&= -(|p|^2 - |q|^2)\sin\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)(\cos^2\tfrac{\beta}{2} - \sin^2\tfrac{\beta}{2}) \\
&= -(|p|^2 - |q|^2)\sin\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)\cos\beta, \\
2\mathrm{Im}(\overline{p'}q') &= 2\mathrm{Im}(\overline{p}q)\cos^2\tfrac{\beta}{2} - 2\mathrm{Im}(p\overline{q})\sin^2\tfrac{\beta}{2} \\
&= 2\mathrm{Im}(\overline{p}q)\cos^2\tfrac{\beta}{2} + 2\mathrm{Im}(\overline{p}q)\sin^2\tfrac{\beta}{2} \\
&= 2\mathrm{Im}(\overline{p}q)
\end{aligned}
$$

ブロッホ球上の回転

したがって,

$$
\begin{aligned}
X' &= \frac{2\mathrm{Re}(\overline{p'}q')}{|p'|^2+|q'|^2} = \frac{-(|p|^2-|q|^2)\sin\beta + 2\mathrm{Re}(\overline{p}q)\cos\beta}{|p|^2+|q|^2} \\
&= X\cos\beta - Z\sin\beta,
\end{aligned}
$$

$$
Y' = \frac{2\mathrm{Im}(\overline{p'}q')}{|p'|^2+|q'|^2} = \frac{2\mathrm{Im}(\overline{p}q)}{|p|^2+|q|^2} = Y.
$$

以上をまとめて

$$
\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X\cos\beta - Z\sin\beta \\ Y \\ X\sin\beta + Z\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}
$$

を得る.これは点 (X', Y', Z') が点 (X, Y, Z) を y 軸の周りに $-\beta$ 回転した点であることを意味する.

ユニタリ作用素と回転

命題 2.4(再掲)

$\forall U \in U(2)$ に対して, $\exists \theta, \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ s.t.

$$U = \Phi(\delta) R_z(\alpha) R_y(\theta) R_z(\beta).$$

特に $U \in SU(2)$ は

$$U = R_z(\alpha) R_y(\theta) R_z(\beta)$$

と表せる.

は任意の量子状態の推移はブロッホ球上の y 軸の周りの回転と z 軸の周りの回転の合成で表されるということを意味する (規約 (2) により, $\Phi(\delta)$ は状態を変えない).